CAHIER DE « VACANCES » EN MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Aux futurs étudiants des classes ECG du lycée Alfred Kastler, ayant choisi les maths approfondies

Félicitations ! Vous voici admis en classe préparatoire aux grandes écoles de commerce !

Vous savez sans doute déjà que l'année qui vous attend sera très chargée, et qu'il faudra faire preuve d'une grande motivation pour faire face à la quantité de travail demandée. En effet, l'état d'esprit n'est plus le même que celui auquel vous avez été habitués : Il ne s'agit plus d'avoir 10 de moyenne, mais d'être le meilleur possible.... Et pour cela, un investissement intense et régulier est indispensable... Nous verrons à la rentrée comment vous aider à vous organiser au mieux dans votre travail, mais soyez d'ores et déjà conscients que sans efforts véritables, il sera difficile d'envisager d'aller au bout de ces deux années de prépa... J'attends de votre part beaucoup de motivation et de maturité, et vous verrez qu'avec du dynamisme et une réelle envie de réussir, vous parviendrez à progresser et à surmonter les difficultés.

En ce qui concerne les maths, attendez-vous à écrire beaucoup ! Voici la liste du matériel attendu :

- Une bonne douzaine de cahiers de 100 pages de format 24×32 pour le cours uniquement !
- Beaucoup de colle ! (le cours est donné sous forme de polycopiés à coller sur la page de gauche et à compléter sur la page de droite du cahier)
- Beaucoup de copies doubles ! (Pour les TD, les DM (un par semaine), les DS (un par mois))
- Du brouillon à profusion, ou mieux : une ardoise de type "velleda" pour travailler pendant les temps de recherche au brouillon

Pensez à ramener votre matériel dès le jour de la rentrée, nous travaillerons dès le matin !

Par ailleurs, les calculatrices étant interdites aux concours, nous n'en utiliserons pas. Vous pouvez donc la ranger ! Par contre, nous aurons presque toutes les semaines une heure « d'informatique », où nous utiliserons le langage "Python". Il serait donc souhaitable que vous vous équipiez d'un ordinateur portable que vous ramènerez le jour des TP d'informatique, et sur lequel vous pourrez continuer à travailler l'informatique en dehors des cours.

Pour finir, afin de préparer sereinement la rentrée et de mettre toutes les chances de votre côté, je vous conseille de vous remettre au travail avant la fin des vacances.... Je vous propose donc de faire les exercices du cahier de vacances **à me rendre impérativement le jour de la rentrée** (et pas après...), dont l'énoncé est donné ci-après. La calculatrice étant interdite aux concours, il s'agit de vous « muscler » en calcul. Ces exercices ont donc pour objectif de réviser les formules de calcul basiques, tout en renforçant votre technique calculatoire ; Ils doivent donc être fait sans calculatrice pour être efficace ! ! ! Vous pouvez néanmoins vous aider de vos cours de terminale, et des rappels proposés à chaque début d'exercice. Vous pouvez aussi me soumettre par mail vos difficultés pour obtenir un coup de pouce si vous êtes coincé ! N'hésitez pas à me poser n'importe quelle question ! Certaines questions de ce devoir vous paraîtront sans doute « difficiles », vous aurez peut-être besoin de conseils ! Voici mon adresse mail :

arnaud.bessiere@akastler-cergy.com

Enfin, ne cherchez pas à faire tous ces exercices d'une seule traite la veille de la rentrée, cela n'aurait pas de sens et perdrait de son intérêt. Au contraire, organisez-vous (sans vous épuiser) pour travailler sur plusieurs semaines, pour avoir le temps de repérer des lacunes éventuelles et d'y remédier. Et comme vous le constaterez, la première question de chaque exercice est déjà corrigée pour vous servir de « modèle » et vous fournir un support d'entraînement. Inutile de la réécrire sur votre copie !

Voilà, le principal est dit, mais tout reste à faire ! Profitez bien de vos vacances, et mettez vous dans un état d'esprit propice au travail sur les deux dernières semaines pour ne pas rater le coche à la rentrée....

M. Bessière, professeur de mathématiques en mathématiques approfondies

Exercice n° 1 : Calcul numérique avec des racines carrées

Rappels sur la manipulation des racines carrées :

- **La racine carrée est compatible avec le produit et le quotient.**
  Autrement dit, pour tout $(x;y)\in[0;+\infty[^2$, on a : $\sqrt{x\times y}=\sqrt{x}\times\sqrt{y}$ et $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ lorsque $y>0$
  Exemple : $\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}$
  $=\sqrt{36}\times\sqrt{2}$
  $=6\sqrt{2}$

- **Attention, la racine carrée n'est pas compatible avec la somme !**
  Exemple : $\sqrt{3^2+4^2}\neq\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$ car $\sqrt{25}\neq 3+4$

- **Pour simplifier une somme avec des racines carrées, on commence par essayer de simplifier chacune des racines carrées en faisant apparaître des carrés parfaits, avant de chercher à les additionner en factorisant par la racine commune (si c'est possible).**
  Exemple : $6\sqrt{75}-3\sqrt{48}+\sqrt{18}=6\times\sqrt{25\times 3}-3\times\sqrt{16\times 3}+\sqrt{9\times 2}$
  $=6\times 5\times\sqrt{3}-3\times 4\times\sqrt{3}+3\sqrt{2}$
  $=(30-12)\sqrt{3}+3\sqrt{2}$
  $=18\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

- **Pour simplifier une fraction avec des racines carrées (et rendre rationnel son dénominateur), on multiplie par l'expression « conjuguée » du dénominateur.**
  Exemple : $\dfrac{\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{8}\times\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}$
  $=\dfrac{2\sqrt{2}\times\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-\sqrt{2}^2}$
  $=\dfrac{2\sqrt{2}-4}{-1}$
  $=4-2\sqrt{2}$

- **Attention aux pièges, le résultat d'une racine carrée est toujours positif !**
  Exemple : $\sqrt{(-3)^2}=3$ (cela ne donne pas -3...)

Simplifiez au maximum les calculs suivants :

- $A=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$
- $C=\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$
- $B=\dfrac{4\sqrt{24}-5\sqrt{96}+\sqrt{54}}{3+\sqrt{6}}$
- $D=\dfrac{\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^4}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2}}$

Corrigé du A) : $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$
$=\dfrac{8+4\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6}{2^2-\sqrt{3}^2}$
$=\dfrac{14+8\sqrt{3}}{1}$
$=14+8\sqrt{3}$

Exercice n° 2 : Calcul numérique avec des puissances

Rappels sur la manipulation des puissances :

- **On peut manipuler les puissances dans les produits et les quotients :**
  En effet, pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, on a :
  - $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ $\quad x^n \times x^p = x^{n+p}$ $\quad (x^n)^p = x^{n \times p}$
  - $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ lorsque $y \neq 0$ $\quad \dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ lorsque $x \neq 0$ $\quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ lorsque $x \neq 0$

  Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned} \frac{(-3)^{2n+1}}{-9^n} &= \frac{(-1 \times 3)^{2n+1}}{-1 \times (3^2)^n} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1} \times 3^{2n+1}}{-1 \times 3^{2n}} \\ &= \frac{-1 \times 3^{2n+1}}{-1 \times 3^{2n}} \text{ car } 2n+1 \text{ est un entier impair} \\ &= 3^{2n+1-2n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

- **Attention aux signes et aux parenthèses !**
  Exemple : $(-2)^4 = 16$, mais $-2^4 = -16$...

- **Attention, les puissances ne sont (en général) pas compatibles avec la somme !**
  Exemple : $4^2 + 5^2 \neq 9^2$, et de manière générale, lorsque n est un entier différent de 1, $4^n + 5^n \neq 9^n$

- **Pour simplifier une somme avec des puissances, on commence par essayer de simplifier chacune des puissances en faisant apparaître des produits de nombres premiers, avant de chercher à les additionner en factorisant par la puissance commune (si c'est possible).**
  Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned} 5 \times 8^n + 2^{3n-1} - \left(2^{n+1}\right)^3 &= 5 \times \left(2^3\right)^n + 2^{3n} \times 2^{-1} - 2^{3(n+1)} \\ &= 5 \times 2^{3n} + 2^{3n} \times \frac{1}{2} - 2^{3n} \times 2^3 \\ &= \left(5 + \frac{1}{2} - 8\right) \times 2^{3n} \\ &= -\frac{5}{2} \times 2^{3n} \end{aligned}$$

- **Une racine carrée est une puissance ! En effet, pour tout $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$**

Simplifiez au maximum les calculs suivants :

- $A = \dfrac{(-2)^3 - 2^2}{(-3)^{-2}}$
- $B = \left(3^3 - (-3)^4\right) \times (2-4)^{-3}$
- $C = \dfrac{(3^{-4} + 3^{-5}) \times (12+6)^4}{(3^2)^3 \times 2^{-4}}$
- $D = \dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{(2^n)^3}$, où $n \in \mathbb{N}$

Corrigé du A) :
$$\begin{aligned} \frac{(-2)^3 - 2^2}{(-3)^{-2}} &= \frac{-8-4}{\frac{1}{(-3)^2}} \\ &= \frac{-12}{\frac{1}{9}} \\ &= -12 \times 9 \\ &= -108 \end{aligned}$$

Exercice n° 3 : Calcul numérique avec des exponentielles

Rappels sur la manipulation des exponentielles :

- **L'exponentielle suit les mêmes règles que les puissances :**
  En effet, pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
  - $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$ $\qquad$ $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
  - $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$ $\qquad$ $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{n\times a}$

  Exemple : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(\mathrm{e}^{-2x})^3 \times \mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-6x} \times \mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{-2x}}$
  $$= \mathrm{e}^{-6x+4x-(-2x)} = \mathrm{e}^0 = 1$$

- **Attention, on ne peut en général pas simplifier une somme d'exponentielle !**
  Exemple : $\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 \neq \mathrm{e}^{0+1}$!!! On peut seulement écrire que $\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 = 1 + \mathrm{e}$

Simplifiez au maximum les calculs suivants :

- $A = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{3+\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{3-\sqrt{2}}}\right)^2$
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-1}}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)^3$
- $B = \left(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2}\right)\sqrt{\dfrac{3\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-3}}}$
- $D = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}} - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-1}}$

Corrigé du A) :
$$\left(\frac{\mathrm{e}^{3+\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{3-\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{\sqrt{2}} \times \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^3}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{2\sqrt{2}}\right)^2 = \mathrm{e}^{4\sqrt{2}}$$

Exercice n° 4 : Calcul numérique avec des logarithmes

Rappels sur la manipulation des logarithmes :

- **La fonction logarithme népérien est la « réciproque » de la fonction exponentielle :**
  - Pour tout $a \in]0;+\infty[$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$
  - Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\ln\left(\mathrm{e}^b\right) = b$

- **La fonction logarithme transforme les produits en somme (et donc les quotients en différence, les puissances en somme, etc...) :**

  En effet, pour tout $(a;b) \in]0;+\infty[^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :
  - $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\quad \ln(1) = 0$
  - $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ $\quad \ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$ $\quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

  Exemple : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\begin{aligned}\ln\left(\mathrm{e}^{-x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right) &= \ln\left(\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right) + \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}}\right)\\ &= \ln\left(3\mathrm{e}^{-x}\right) + \ln\left(\sqrt{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}\right)\\ &= \ln(3) + \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^x\right)\\ &= \ln(3) - x + x\\ &= \ln(3)\end{aligned}$$

- **Attention, on ne peut en général pas simplifier le logarithme d'une somme !**

  Exemple : $\ln(1+1) \neq \ln(1) + \ln(1)$ car $\ln(2) \neq 0$! ! !

Simplifiez au maximum les calculs suivants :

- $A = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$
- $C = \dfrac{2\ln(15) - \ln(60+15)}{\mathrm{e}^{-\ln(\ln(3))}}$
- $B = \dfrac{\frac{1}{2}\ln(4) - 3\ln(2)}{2\ln(45) - \ln(25) - 2\ln(3)}$
- $D = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}} + \dfrac{\mathrm{e}}{\sqrt{e}}\right)$

Corrigé du A) :
$$\begin{aligned}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \ln\left(2-\sqrt{3}\right) &= \ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\times\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\\ &= \ln\left(2^2 - \sqrt{3}^2\right)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice n° 5 : Manipulation des polynômes du 2nd degré

Dans cette partie, a est un réel non nul, et b et c sont des réels quelconques.

Rappels sur la manipulation des polynômes du second degré :

Les caractéristiques d'un polynôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$ dépendent du signe de son discriminant défini par $\Delta = b^2 - 4ac$:

	Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation du polynôme $ax^2 + bx + c$	Signe du polynôme $ax^2 + bx + c$
Si $\Delta > 0$	Deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Pour tout réel x, on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	Dans le cas où $x_1 < x_2$, on a : x : $-\infty$; x_1 ; x_2 ; $+\infty$ ax^2+bx+c : signe de a ; 0 ; signe de $-a$; 0 ; signe de a (Même principe dans le cas où $x_2 < x_1$)
Si $\Delta = 0$	Une seule solution réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$	Pour tout réel x, on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	x : $-\infty$; x_0 ; $+\infty$ ax^2+bx+c : signe de a ; 0 ; signe de a
Si $\Delta < 0$	Pas de solution réelle	Pas de factorisation	x : $-\infty$; $+\infty$ ax^2+bx+c : signe de a

Exemple : On considère le polynôme du second degré $5x^2 + 5x - 30$.
Ce polynôme admet pour discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 5 \times (-30) = 625 > 0$.
L'équation $5x^2 + 5x - 30 = 0$ admet 2 solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{625}}{2\times 5} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{625}}{2\times 5} = 2$

On peut donc le factoriser et écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5x^2 + 5x - 30 = 5(x - 2)(x + 3)$.

Enfin, le tableau de signe de ce polynôme est donné par :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$5x^2+5x-30$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$A)$ $2x^2 + 4x - 6 = 0$

$B)$ $\dfrac{x^2}{2} + 2x = -2$

$C)$ $-x^2 + 3x > 0$

$D)$ $\left(x^2 + x + 1\right)\left(3x^2 - 12\right) < 0$

Corrigé du A) : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \iff x = \dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times 2}$ ou $x = \dfrac{-4+\sqrt{64}}{2\times 2}$

car on a une équation du second degré de discriminant égal à : $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64 > 0$

Bilan : $\mathscr{S} = \{-3; 1\}$

Exercice nº 6 : Calcul algébrique avec des fractions

Rappels utiles sur les calculs avec fractions :

- **Lorsqu'on calcule une somme de fraction, on réduit au même dénominateur ces fractions, en cherchant, si possible, un dénominateur commun « optimal »** : le plus petit multiple commun, il ne faut pas systématiquement multiplier tous les dénominateurs !!!!
  Exemple : Pour tout $x > 0$, on a :
  $$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2} + \frac{1 \times \sqrt{x}}{x\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}$$
  (prendre $x^2 \times x\sqrt{x}$ pour dénominateur commun « compliquerait » le calcul)
- **Il faut, dans la mesure du possible, toujours essayer de simplifier au maximum les résultats fractionnaires**, en factorisant le numérateur et le dénominateur, puis en essayant de repérer les facteurs communs éventuels.
  Exemple : $\frac{x^2-2x-3}{x(x+1)}$ est simplifiable ! En effet, $\frac{x^2-2x-3}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x-3)}{x(x+1)} = \frac{x-3}{x}$
  (La factorisation du numérateur s'obtient en repérant que x^2-2x-3 est un polynôme du 2nd degré admettant deux racines : -1 et 3)

Simplifiez au maximum les calculs suivants, sans vous préoccuper des ensembles de définition :

$$A(x) = \frac{x-3}{x(x-2)} + \frac{2}{x^2-4}$$

$$C(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{3}{x-1}$$

$$B(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{x}} + \frac{e^{-x}+e^{x}}{1-e^{-x}}$$

$$D(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-3} - \frac{2}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Corrigé du A) :
$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x(x-2)} + \frac{2}{x^2-4} &= \frac{x-3}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{2x}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x^2+2x-3x-6+2x}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x^2+x-6}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x-2)(x+3)}{x(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x+3}{x(x+2)}
\end{aligned}$$

prendre $x(x-2)(x^2-4)$ pour dénominateur commun compliquerait les calculs

x^2+x-6 est un polynôme du second degré de racines 2 et -3, on peut donc le factoriser par $x^2+x-6 = 1(x-2)(x-(-3))$

Exercice n° 7 : Calculs pour prouver une égalité

Rappels méthodologiques pour prouver l'égalité de deux expressions :

Pour prouver que deux expressions données sont égales, on peut :

- **Transformer l'une des deux expressions pour aboutir à l'autre.**
- **Transformer les deux expressions et aboutir à un même résultat.**
- **Montrer que la différence est nulle.**

Exemple : Pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $3 \times \sqrt{2}^{2n} - 5 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n+1} - 30 \times 2^{n-2}$, on peut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
3\times\sqrt{2}^{2n} - 5\times2^{n-1} - 4\times2^{n+1} + 30\times2^{n-2} &= 3 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} - 5 \times 2^n \times 2^{-1} - 4 \times 2^n \times 2^1 + 30 \times 2^n \times 2^{-2} \\
&= 3 \times 2^{\frac{1}{2}\times 2n} - 5 \times 2^n \times \frac{1}{2} - 8 \times 2^n + 30 \times 2^n \times \frac{1}{2^2} \\
&= 3 \times 2^n - \frac{5}{2} \times 2^n - 8 \times 2^n + \frac{30}{4} \times 2^n \\
&= \left(3 - \frac{5}{2} - 8 + \frac{15}{2}\right) \times 2^n \\
&= \left(-5 + \frac{10}{2}\right) \times 2^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $3 \times 2^n - 5 \times 2^{n-1} = 4 \times 2^{n+1} - 30 \times 2^{n-2}$

Montrer les égalités suivantes :

A) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-x} \ln(1 + e^x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

B) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad \ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1) - 2x = \ln\left(1 - e^{-2x}\right)$

C) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \left(-\sqrt{2}\right)^{2n+1} + \dfrac{\sqrt{2}^{4n+1}}{2^{n-1}} = 2 \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2n+1}$

D) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \left(\dfrac{16}{9}\right)^{-n+1} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n-1} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1}$

E) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad e^{3\ln\left(\sqrt{x}\right)} \left(\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}\right) = 4\left(e^{\frac{1}{2}\ln(x)} + \dfrac{\ln\left(\sqrt{e^{-x}}\right)}{\sqrt{x}}\right)$

Corrigé du A) : Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-x} \ln(1 + e^x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
e^{-x} \ln(1 + e^x) &= e^{-x} \ln\left(e^x\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right) \\
&= e^{-x} \ln\left(e^x\left(e^{-x} + 1\right)\right) \\
&= e^{-x} \left(\ln(e^x) + \ln\left(e^{-x} + 1\right)\right) \\
&= e^{-x} \left(x + \ln\left(e^{-x} + 1\right)\right) \\
&= xe^{-x} + e^{-x} \ln\left(e^{-x} + 1\right) \\
&= \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln\left(1 + e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

Exercice n° 8 : Calculs pour résoudre une équation

Rappels sur la résolutions d'équations :

① **On débute en déterminant le domaine de validité de cette équation** que l'on note $\mathscr{D}$

② **On écrit « Soit $x \in \mathscr{D}$ », puis on raisonne par équivalences successives pour se ramener à une équation plus « simple » :**

- Soit une équation « produit nul » (en factorisant)
- Soit une équation « quotient nul » (en réduisant au même dénominateur)
- Soit une équation du premier ou du second degré, quitte à effectuer un changement de variable en posant un « X »

③ **On conclut en donnant l'ensemble des solutions de l'équation**.

Exemple : Pour résoudre l'équation : $x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$, on écrit :

Soit $x \in [0; +\infty[$. (le domaine de validité est ici $[0; +\infty[$ car $\sqrt{x}$ existe si et seulement si $x \geqslant 0$)

$$
\begin{aligned}
x + 2\sqrt{x} - 3 = 0 &\iff \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} - 3 = 0 \\
&\iff X^2 + 2X - 3 = 0 \text{ en posant } X = \sqrt{x} \\
&\iff X = 1 \text{ ou } X = -3 \text{ (On a une équation du 2}^{\text{nd}}\text{ degré, on calcule } \Delta \text{ et les racines éventuelles au brouillon)} \\
&\iff \sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = -3 \\
&\iff x = 1 \text{ le deuxième cas est impossible car une racine carrée est toujours positive}
\end{aligned}
$$

Bilan : $\mathscr{S} = \{1\}$

Résoudre les équations suivantes :

A) $(2x-3)(x+2)^2 = (8x-12)(3x-1)^2$

B) $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

C) $(\ln(x))^2 + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 6$

D) $\dfrac{e^{2x}-3}{e^{2x}-5} = \dfrac{1}{2}$

E) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

F) $e^x - 6e^{-x} = -5$

Corrigé du A) : Résolvons l'équation : $(2x-3)(x+2)^2 = (8x-12)(3x-1)^2$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(2x-3)(x+2)^2 = (8x-12)(3x-1)^2 &\iff (2x-3)(x+2)^2 - 4(2x-3)(3x-1)^2 = 0 \\
&\iff (2x-3)\left((x+2)^2 - 4(3x-1)^2\right) = 0 \\
&\iff (2x-3)\left((x+2)^2 - (2(3x-1))^2\right) = 0 \\
&\iff (2x-3)\left((x+2) - 2(3x-1)\right)\left((x+2) + 2(3x-1)\right) = 0 \\
&\iff (2x-3)(-5x+4)(7x) = 0 \\
&\iff 2x-3 = 0 \text{ ou } -5x+4 = 0 \text{ ou } 7x = 0 \\
&\iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{4}{5} \text{ ou } x = 0
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{0; \frac{4}{5}; \frac{3}{2}\right\}}$

Exercice n° 9 : Calculs pour résoudre une inéquation

Rappels sur la résolutions d'inéquations :

① **On débute en déterminant le domaine de validité de cette inéquation** que l'on note $\mathscr{D}$

② **On écrit « Soit $x \in \mathscr{D}$ », puis on raisonne par équivalences successives pour se ramener à une inéquation plus « simple » :**

- Soit une inéquation où l'on se ramène à chercher le signe d'un produit par tableau de signe (après avoir factorisé)
- Soit une inéquation où l'on se ramène à chercher le signe d'un quotient par tableau de signe (après avoir réduit au même dénominateur)
- Soit une inéquation du premier ou du second degré, quitte à effectuer un changement de variable en posant un « X ».

③ **On conclut en donnant l'ensemble des solutions de l'inéquation**.

Exemple : Résolvons l'inéquation $x^3 + 5x^2 < 6x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^3 + 5x^2 < 6x \iff x^3 + 5x^2 - 6x < 0$$
$$\iff x\left(x^2 + 5x - 6\right) < 0$$

On peut alors faire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-6		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x^2+5x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x\left(x^2+5x-6\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty ; -6[\cup]0 ; 1[}$

Résoudre les inéquations suivantes :

A) $\dfrac{\ln(x) + 3}{\ln(x) + 1} > 2$

B) $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant \dfrac{2x}{x-1}$

C) $\ln(5x - 6) - 2\ln(x) \leqslant 0$

D) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 6 < 0$

E) $\ln(x) - 4 \leqslant \dfrac{5}{\ln(x)}$

F) $\dfrac{-3}{\mathrm{e}^{x}} > \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{x}}$

Corrigé du A) : Résolvons l'inéquation $\dfrac{\ln(x) + 3}{\ln(x) + 1} > 2$,

Les expressions en jeu existent si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) + 1 \neq 0 \end{cases}$ c'est à dire lorsque $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$

Donc, le domaine de validité de l'inéquation est $]0 ; \mathrm{e}^{-1}[\cup]\mathrm{e}^{-1} ; +\infty[$.

Soit $x \in]0 ; \mathrm{e}^{-1}[\cup]\mathrm{e}^{-1} ; +\infty[$.

$$\frac{\ln(x) + 3}{\ln(x) + 1} > 2 \iff \frac{\ln(x) + 3}{\ln(x) + 1} - 2 > 0 \iff \frac{\ln(x) + 3 - 2(\ln(x) + 1)}{\ln(x) + 1} > 0 \iff \frac{-\ln(x) + 1}{\ln(x) + 1} > 0$$

Nous cherchons le signe d'un quotient, nous allons devoir faire un tableau de signe.

- Étude du signe du numérateur : $-\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < \mathrm{e}$
- Étude du signe du dénominateur : $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
- Conclusion : On peut faire le tableau de signe suivant :

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$-\ln x + 1$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x) + 1$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-\ln(x) + 1}{\ln(x) + 1}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On voit que $\dfrac{-\ln(x) + 1}{\ln(x) + 1} > 0 \iff x \in \left]\mathrm{e}^{-1} ; \mathrm{e}\right[$

Bilan : $\boxed{\mathscr{S} = \left]\mathrm{e}^{-1} ; \mathrm{e}\right[}$

Exercice n° 10 : Calculs de dérivées sans composées

Rappels des formules de dérivation :

- **Dérivées des fonctions usuelles :**

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Dérivée
x^n, où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x

- **Opérations sur les dérivées :**
  Soient u et v deux fonctions réelles, dérivables sur un intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
  - La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
  - La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$
  - La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$
  - Si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
  - Si v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.
Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 3 \times -\dfrac{1}{x^2} + 5 \times -\dfrac{2}{x^3} = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{10}{x^3}$

Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

A) $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

B) $g : x \mapsto \left(x^2 - x + 1\right)\ln(x)$

C) $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

D) $k : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$

E) $\ell : x \mapsto \dfrac{3x\ln(x)}{2\mathrm{e}^x}$

F) $m : x \mapsto \sqrt{x}\mathrm{e}^x$

Corrigé du A) : Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$. On note que $f(x) = 3 \times \dfrac{1}{u(x)}$ où $u(x) = \sqrt{x}$.
La fonction u est dérivable et NON NULLE sur $]0;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Et, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 3 \times -\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2} = -3 \times \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$

Remarque : Nous apprendrons à faire autrement cette année, en raisonnant avec des puissances :

$$\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 3 \times -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$$

Exercice n° 11 : Calculs de dérivées avec composées

Rappels des formules de dérivation :

- **Dérivées d'une composée par une fonction affine :**
  Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J.
  Soit I un intervalle. Soit a et b deux réels tels que pour tout $x \in I$, $ax+b \in J$.
  Soit g la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = f(ax+b)$.
  Alors, g est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a $g'(x) = a \times f'(ax+b)$

  Exemple : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(2x-4)^3}$. On remarque que :

  - Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $f(x) = h(2x-4)$ où h est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(X) = \dfrac{1}{X^3}$
  - La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $X \in \mathbb{R}^*$, $h'(X) = \dfrac{-3}{X^4}$
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a $2x-4 \in \mathbb{R}^*$.

  Donc, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, on a :
  $f'(x) = 2 \times h'(2x-4) = 2 \times \dfrac{-3}{(2x-4)^4} = -\dfrac{6}{(2x-4)^4}$

- **Dérivées de certaines fonctions composées :** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie par $f =$	est dérivable sur I de dérivée f' égale à	avec la condition
u^2	$2u \times u'$	
$\ln(u)$	$\dfrac{1}{u} \times u'$	$u > 0$ sur I
e^u	$e^u \times u'$	

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(\ln(x))$.
On remarque que $f(x) = \ln(u(x))$ où $u(x) = \ln(x)$.
La fonction u est dérivable et STRICTEMENT POSITIVE sur $]1;+\infty[$, donc f est aussi dérivable sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

A) $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$

B) $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

C) $h : x \mapsto \sqrt{3x-2}$

D) $k : x \mapsto \dfrac{3+5e^{-x}}{2e^x - 1}$

E) $\ell : x \mapsto 3x^2 e^{\frac{1}{x}}$

F) $m : x \mapsto \left(\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)^2$

Corrigé du A) : Déterminons le domaine de dérivabilité puis la dérivée de $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

- Commençons par déterminer le domaine de définition de f :
  $x \in \mathscr{D}_f \iff \sqrt{x}$ existe $\iff x \geqslant 0$
  Donc, la fonction f est définie sur $[0;+\infty[$
- Ensuite, on remarque que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = e^{u(x)}$ où $u(x) = \sqrt{x}$.
  La fonction u est dérivable sur $]0;+\infty[$. Donc, f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
  Et, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

BILAN : f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

Exercice n° 12 : Calculs d'intégrales

Rappels méthodologiques pour calculer une intégrale du type $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$:

① **On détermine une primitive F de f** par lecture inverse des tableaux de dérivation, que l'on écrit entre crochets sous la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$

On rappelle notamment que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors :

- Une primitive de $u'u^2$ est $\dfrac{u^2}{2}$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ (lorsque u est une fonction strictement positive sur I)
- Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u

② **On calcule $F(b) - F(a)$ pour finir le calcul** : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple : Calculons $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

On remarque que l'on a une intégrale du type $\displaystyle\int_0^1 -\frac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\mathrm{d}x$ où $u(x) = -x^2$.

Or, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -\dfrac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. (Pensez à vérifier : il suffit de dériver la primitive !)

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1^2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0^2} = -\frac{1}{2\mathrm{e}} + \frac{1}{2}$

Calculer en justifiant les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 2\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$$

$$B = \int_1^2 \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^5}\right)\mathrm{d}x$$

$$C = \int_0^1 \mathrm{e}^t(-4\mathrm{e}^t + 5)\mathrm{d}t$$

$$D = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$$

$$E = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$F = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} - 3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$G = \int_0^1 \frac{t^2}{5t^3 + 1}\mathrm{d}t$$

$$H = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$$

Corrigé du A) :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{2}{-3} \times -3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{2}{3} \times \mathrm{e}^{-3x}\right]_0^1 \quad \text{une primitive de } u'\mathrm{e}^u \text{ est } \mathrm{e}^u \text{ avec ici } u(x) = -3x \\ &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$