Travail de vacances en mathématiques

Le programme de mathématiques en ECE se situe dans la lignée du programme de terminale en ce qui concerne les sujets abordés (analyse et étude de fonctions, probabilités). Toutefois, pour réussir cette année, vous aurez besoin d'étudier ces notions avec un état d'esprit différent : il faudra faire preuve de plus d'autonomie, et surtout vous aurez besoin de vous "muscler" en calcul.
Pour vous entraîner je vous propose de rédiger le devoir à la maison suivant, composé de petites questions techniques et d'exercices plus conséquents.
Il sera ramassé le jour de la rentrée.
Il est conseillé de le traiter au mois d'août, vers la fin de vos vacances pour vous remettre dans le bain. Mais n'attendez pas la dernière minute, certaines questions peuvent vous demander un peu de réflexion et un temps de maturation.
De plus, il vous est demandé de connaître sur le bout des doigts tout le cours concernant les fonctions usuelles (ln, exp, puissances, racines carrées), qu'il soit lié à la dérivation, aux limites, aux règles de calcul, aux domaines de définition.
Par ailleurs, je vous signale que la calculatrice est interdite au concours.
Elle ne pourra donc plus vous servir d'aide mémoire, vous devez donc impérativement mémoriser toutes les formules qu'elle a pu contenir.
Bonnes vacances à tous.

Exercice 1

Pour l'étude de ce problème, je vous conseille de ne pas utiliser la calculatrice.
Il faut en effet savoir que la calculatrice est interdite au concours, et il convient de s'entraîner à étudier des fonctions et à tracer des allures de courbes sans utiliser la machine.

On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - \ln x$ et f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$.
On note C la courbe de f et D la droite d'équation $y = x$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de g.
   (b) Déterminer le tableau de variation complet de g (avec les limites aux bornes).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. (a) Déterminer le domaine de définition de f ainsi que son sens de variation.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que D est asymptote à C, puis étudier la position de C par rapport à D.
   (b) Montrer qu'il existe une unique point $(x_0, f(x_0))$ de la courbe tel que la tangente à la courbe en ce point soit parallèle à C.
   On donnera les coordonnées de ce point, ainsi que l'équation de la tangente D_1 à la courbe en ce point.
   (c) Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en un unique point.
   Montrer que l'abscisse de ce point est inférieure à $\dfrac{1}{e}$.
   (d) Tracer dans un même repère orthonormé la courbe C, ainsi que les droites D, D_1, ainsi que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{e}$. On donne $\dfrac{1}{e} = 0,37$ à 0.01 près.

Exercice 2

A] Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+a)e^{-x} + b$ pour tout x réel (avec a et b réels à déterminer).

1. On sait que la courbe représentative de g passe par le point A$(4, 1)$ et que la tangente au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{e^4}$.
   A l'aide des données graphiques, déterminer a et b.
2. Etudier les variations de g sur R. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 5]$.
   Donner une valeur approchée de cette solution, notée a à 10-2 près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-x)e^{-x} + x + 2$. On note B sa courbe représentative
dans un repère.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (on pourra modifier l'écriture de $f(x)$ si nécessaire)
2. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f. Préciser les points où la tangente est horizontale.
5. (a) Montrer que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à B en $+\infty$.
   (b) Etudier la position relative de ces deux courbes.
6. Déterminer les coordonnées des points où la tangente à B est parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$.
7. Donner l'approximation affine de f au voisinage de 0. En déduire une valeur approchée de $f(0,01)$ sans utiliser la calculatrice.
8. Tracer B ainsi que les asymptotes et les tangentes particulières.

Exercice 3

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - x)}{1 + x^2}$.
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction définie par $i(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$, $\ln(x + 1) + 2 = 0$.
4. Résoudre $e^x + 1 = 0$.
5. Résoudre $e^{2x-3} - 1 = 0$.
6. Résoudre $x^2 = 6$.
7. Résoudre $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$.
8. Résoudre $(\ln x)^2 - \ln(x^2) - 3 = 0$.
9. Résoudre l'inéquation en x : $exp(-2x + 1) \geqslant 3$
10. Résoudre l'inéquation en x : $2x^2 - 5x + 2 = 0$
11. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x \ln x$.
12. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{(e^x - 1)}{e^{2x+1}}$.
13. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = \ln(3x + 1)(x - 1)$.
14. Simplifier l'expression suivante $\text{A} = \dfrac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1} \times 2^3)^3}$.
15. Simplifier l'expression suivante $\text{B} = \dfrac{\dfrac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}}{\dfrac{10^2 \times 2}{5^8}}$.
16. Simplifier l'expression suivante $\text{C} = \dfrac{e^{2x+3}}{e^{x+1}}$.
17. Simplifier l'expression suivante $\text{D} = \ln(2x^2 + 3x) - \ln x$
18. Simplifier l'expression suivante $\text{E} = \dfrac{\ln((x + 1)^n)}{\ln(x + 1)}$.
19. Factoriser l'expression $\text{F} = \dfrac{2e^{2x}\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{xe^{2x}}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1}$.
20. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} (x - 2) \ln x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} + x - 12$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
21. Calculer $\int_0^2 (2x + 1)^3 dx$, $\int_0^1 \dfrac{1}{2x + 3} dx$, $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Exercice 4

Lors d'une Kermesse, les organisateurs proposent un jeu qui se déroule de la manière suivante :
La mise de départ est de 2 euros.
Le jeu comporte ensuite deux phases : on tire d'abord au hasard une boule dans une urne contenant 3 boules rouges, 7 jaunes et 5 bleues.

- Si la boule tirée est rouge, on lance la roue numéro 1 coloriée de deux couleurs (rouge et noire) : si l'aiguille tombe sur le secteur rouge, qui représente 10% de la surface totale de la roue, le joueur gagne 6 euros. Sinon il ne gagne rien.
- Si la boule tirée est bleue, le joueur lance la roue numéro 2 coloriée des deux couleurs bleue et noire : si l'aiguille tombe sur le secteur bleu, qui représente 30% de la surface totale de la roue, le joueur gagne 3 euros. Sinon il ne gagne rien.
- Enfin, si la boule tirée est jaune, le joueur retire une boule dans l'urne sans remettre la première : si la deuxième boule est à nouveau jaune, il gagne 10 euros sinon il perd 15 euros.

1. Traduire cet énoncé à l'aide d'un arbre de probabilités (expliquer le calcul des différentes probabilités, préciser les chemins (ou listes) ainsi que les gains algébriques)
2. Calculer la probabilité que le gain algébrique soit positif
3. Calculer la probabilité que le gain soit positif sachant que l'on a tiré une première boule jaune.
4. Déterminer la loi de probabilité du gain.
5. Calculer l'espérance et l'écart type du cette loi. Le jeu est-il équitable ?

   Dans la suite de l'énoncé, on admet que la probabilité de gagner de l'argent est de 0,32. On appelle partie gagnée, une partie qui rapporte de l'argent.
6. Mathilde décide de faire trois parties de ce jeu.
   Les parties sont supposées indépendantes les unes des autres.
   (a) Quelle loi suit le nombre de parties gagnées (bien justifier) ? Faire un arbre relatant cette expérience.
   (b) Calculer la probabilité qu'elle ne gagne aucune partie.
   (c) Calculer la probabilité qu'elle en gagne au moins une.
   (d) Calculer la probabilité qu'elle en gagne deux sur les trois.
7. Elle décide maintenant de faire n parties. Combien de parties doit-elle faire au minimum pour que la probabilité qu'elle en gagne au moins une soit supérieure ou égal à 90% ?